Ранг и системы

Краткое содержание

Ранг матрицы — максимальный порядок ненулевого минора, равный числу линейно независимых строк или столбцов и определяемый по ступенчатому виду.

Миноры матрицы

> ***Минор k-го порядка*** *— определитель квадратной подматрицы, полученной выбором k строк и k столбцов исходной матрицы с сохранением их порядка.*

Если матрица имеет m строк и n столбцов, то $k \le \min(m, n)$.

Обозначение

Минор записывают так: $M^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}$, где верхние индексы указывают выбранные строки, а нижние — столбцы. Например, $M_{1,2}$ строится по элементам на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов.

Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

минор второго порядка равен

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5.$$

Число миноров

Выбор строк и столбцов — комбинаторная задача. Число миноров k-го порядка в матрице $m \times n$:

$$\binom{m}{k}\binom{n}{k}.$$

Например, в матрице 4×5 число миноров второго порядка равно

$$\binom{4}{2}\binom{5}{2} = 6 \cdot 10 = 60.$$

В матрице 3×4 имеется $\binom{4}{3} = 4$ минора третьего порядка, поскольку все три строки выбираются единственным способом.

Максимальные и базисные миноры

> *Если матрица A содержит хотя бы один ненулевой элемент, существует наибольшее натуральное число r, для которого есть ненулевой минор порядка r, а все миноры более высокого порядка равны нулю.*

Число r называется **максимальным порядком ненулевых миноров**.

Если матрица нулевая, по определению её максимальный порядок ненулевого минора равен 0.

Базисный минор

Любой ненулевой минор максимального порядка r называется **базисным минором**.

Строки и столбцы, участвующие в базисном миноре, называются соответственно **базисными строками** и **базисными столбцами**.

Теорема о базисном миноре

Базисные строки и базисные столбцы линейно независимы. Любая другая строка является линейной комбинацией базисных строк; аналогично любой другой столбец является линейной комбинацией базисных столбцов.

Следовательно, базисные строки образуют максимальную линейно независимую подсистему строк, а базисные столбцы — максимальную линейно независимую подсистему столбцов.

У матрицы может быть несколько базисных миноров, но их порядок одинаков.

Ранг матрицы

> ***Ранг матрицы*** A *— максимальный порядок её ненулевых миноров.*

Обозначение: $\operatorname{rk} A$ или $r(A)$.

Эквивалентно, ранг равен:

- максимальному числу линейно независимых строк;
- максимальному числу линейно независимых столбцов;
- числу строк ненулевого ступенчатого вида матрицы.

Всегда выполняется

$$\operatorname{rk} A \leq \min(m, n).$$

Если хотя бы один элемент матрицы ненулевой, то $\operatorname{rk} A \geq 1$. Для нулевой матрицы $\operatorname{rk} A = 0$.

Пример

Для матрицы размера 3×4 ранг не превосходит 3. Если некоторый минор второго порядка ненулевой, то ранг не меньше 2. Если все четыре минора третьего порядка равны нулю, то

$$\operatorname{rk} A = 2.$$

Если одна строка является суммой двух других, строки линейно зависимы, поэтому ранг матрицы с тремя строками меньше 3.

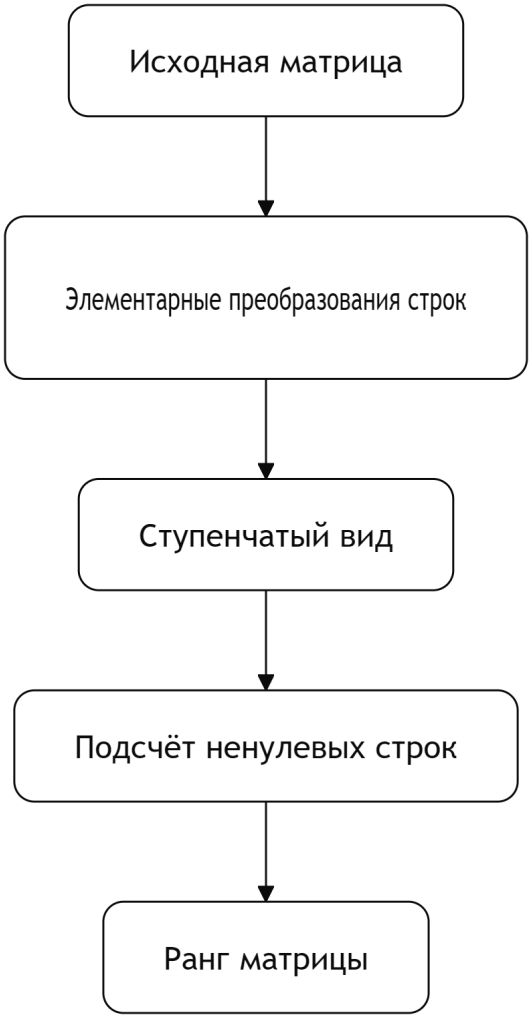
Элементарные преобразования

Перестановка строк, умножение строки на ненулевое число и прибавление к строке другой строки, умноженной на число, **не изменяют ранг**.

Поэтому матрицу можно привести к ступенчатому виду и определить ранг без перебора миноров:

$$\operatorname{rk} A = \text{число ненулевых строк ступенчатой матрицы.}$$

Это число также равно количеству ступеней или ведущих элементов.



Нахождение ранга преобразованиями

Для большой матрицы поиск максимального ненулевого минора требует большого числа вычислений, поэтому используют элементарные преобразования.

Алгоритм:

1. Выбрать ведущую строку и ведущий элемент.
2. Обнулить элементы под ведущим элементом.
3. Перейти к следующей строке и следующему столбцу.
4. Продолжать до получения ступенчатого вида.
5. Посчитать ненулевые строки.

В рассмотренном примере после преобразований получается три ненулевые строки и одна нулевая строка. Поэтому

$$\operatorname{rk} A = 3.$$

Если строки пропорциональны, одна из них после преобразования превращается в нулевую, что позволяет заранее увидеть линейную зависимость и уменьшить объём вычислений.

Системы линейных уравнений

Решение системы — набор действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, после подстановки которого каждое уравнение системы превращается в истинное равенство.

- **Совместная система** имеет хотя бы одно решение.
- **Несовместная система** не имеет решений.
- Совместная система называется **определённой**, если имеет единственное решение.
- Совместная система называется **неопределённой**, если имеет более одного решения.

Система не может иметь ровно два, три или другое конечное число решений: если решений больше одного, их бесконечно много.

Однородная система

Система называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$b_i = 0 \quad \text{для всех } i.$$

Однородная система всегда совместна, поскольку имеет нулевое, или **тривиальное-**, решение:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Смысл числа решений важен в моделях оптимизации: отсутствие решений означает несовместность ограничений, единственное решение полностью фиксирует результат, а бесконечное множество решений позволяет выбирать оптимальный вариант.

Матричная форма системы

Систему линейных уравнений можно задать матрицей коэффициентов A, столбцом неизвестных X и столбцом свободных членов B.

Для системы с m уравнениями и n неизвестными:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы A размера $m \times n$ на столбец X размера $n \times 1$ даёт столбец размера $m \times 1$:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Поэтому система записывается компактно:

$$AX = B.$$

Матрица A содержит коэффициенты неизвестных, X — неизвестные, B — свободные члены.

Формулы Крамера

Для квадратной системы n линейных уравнений с n неизвестными рассматривают определитель матрицы коэффициентов A.

Если

$$\det A \neq 0,$$

то система имеет **единственное решение**.

Это решение находят по **формулам Крамера**. Их применение и явный вид формул рассматриваются далее.