Теория множеств

Краткое содержание

Множества объединяют различимые объекты, а отношения принадлежности, мощности
, равенства и включения позволяют строго сравнивать конечные и бесконечные совокупности.

Понятие множества

> ***Множество*** *— объединение в единое целое различных объектов, хорошо различаемых интуицией или мышлением.*

Объекты, составляющие множество, называются его **элементами**. Классическое определение связывают с Георгом Кантором: множество — это «многое, мыслимое как единое».

Обозначения

- Множества обозначают **прописными латинскими буквами**: A, B, C.
- Элементы обозначают **строчными буквами**: a, b, c.

Различие регистра важно: использование одной и той же строчной буквы для множества и элемента считается некорректным и может привести к неверному пониманию записи.

Принадлежность элементов

Для любого объекта однозначно устанавливается, принадлежит он множеству или нет. Это соответствует **закону исключённого третьего**: объект либо принадлежит множеству, либо не принадлежит ему; частичная принадлежность в рассматриваемой теории не используется.

- $a \in A$ — объект a принадлежит множеству A.
- $a \notin A$ — объект a не принадлежит множеству A.

Объект называют элементом множества только после установления факта $a \in A$.

Числовые множества

Основные числовые множества имеют устойчивые обозначения:

Обозначение	Название	Примеры и характеристика
$\mathbb{N}$	натуральные числа	$1, 2, 3, \ldots$; в данном курсе $0 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{N}_0$	неотрицательные целые числа	$0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	целые числа	$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Q}$	рациональные числа	

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app

		числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$
$\mathbb{I}$	иррациональные числа	например, $\sqrt{15}$; не представляются обыкновенной дробью
$\mathbb{R}$	действительные числа	объединяют рациональные и иррациональные числа
$\mathbb{C}$	комплексные числа	расширение действительных чисел

Примеры принадлежности:

- $5 \in \mathbb{N}$, а $0 \notin \mathbb{N}$;
- $5{,}3 \in \mathbb{Q}$;
- $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$, но $\sqrt{15} \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Числовые множества вложены друг в друга: рациональные числа входят в действительные, а натуральные — в целые.

Примеры множеств

Множество может состоять не только из чисел:

- множество людей, родившихся в **2008 году**;
- множество действительных решений уравнения;
- множество студентов группы;
- множество объектов, заданных некоторым общим свойством.

Важно отличать множество от количества его элементов: «2008» может быть элементом или обозначением, но множество людей 2008 года рождения состоит из самих людей.

Мощность множества

Количество элементов множества называется его **мощностью** и обозначается вертикальными чертами:

$$|A|$$

Например, если $A = \{2, 4, 6\}$, то $|A| = 3$.

Повторная запись одного и того же элемента мощности не увеличивает: множество $\{1, 1, 2\}$ равно множеству $\{1, 2\}$ и имеет мощность 2.

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app

Специальные множества

- **Единичное множество** содержит ровно один элемент: $|A| = 1$.
- **Пустое множество** не содержит элементов: $|\varnothing| = 0$.

Не следует путать:

$$\varnothing \neq \{\varnothing\}$$

У пустого множества нет элементов, а $\{\varnothing\}$ содержит один элемент — пустое множество. Поэтому $|\{\varnothing\}| = 1$.

Единичное множество также не следует путать с единичной матрицей: матрица размера $n \times n$ содержит n^2 элементов, из которых n единиц стоят на главной диагонали, а остальные $n^2 - n$ — нули.

Конечные и бесконечные множества

Конечное множество состоит из конечного числа элементов; его мощность равна некоторому натуральному числу.

Бесконечное множество не имеет конечной мощности. Примеры бесконечных множеств: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$.

Счётная бесконечность

Бесконечное множество называется **счётным**, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами. Его мощность совпадает с мощностью натуральных чисел и обозначается $\aleph_0$.

Счётными являются:

- $\mathbb{N}$;
- $\mathbb{N}_0$: последовательность $0, 1, 2, 3, \dots$ можно перенумеровать;
- $\mathbb{Z}$: например, порядок $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$ задаёт нумерацию;
- $\mathbb{Q}$: рациональные числа можно расположить в таблице по числителю и знаменателю и обходить «ёлочкой», пропуская повторяющиеся дроби вроде $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$.

Таким образом,

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Множество действительных чисел **несчётно**: его элементы невозможно полностью пронумеровать натуральными числами. Его мощность — мощность континуума, обычно обозначаемая $\mathfrak{c}$, причём

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Даже отрезок $[0, 1]$ имеет ту же мощность, что и вся числовая прямая $\mathbb{R}$:

$$|[0, 1]| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

Мощность множества точек трёхмерного пространства с координатами (x, y, z) также равна мощности континуума:

$$|\mathbb{R}^3| = \mathfrak{c}.$$

Следовательно, бесконечности бывают разными: счётная бесконечность $\aleph_0$ меньше несчётной мощности континуума $\mathfrak{c}$.

Равномощность множеств

> ***Равномощные множества*** *— множества, имеющие одинаковое количество элементов:*
>
> $$|A| = |B|.$$

Равномощность не означает, что множества содержат одинаковые элементы. Например, $\{1, 2, 3\}$ и $\{a, b, c\}$ равномощны, хотя их элементы различны.

Множество $\{x\}$ и множество $\{\{a\}\}$ также равномощны: каждое содержит по одному элементу.

Равенство множеств

Два множества равны тогда и только тогда, когда состоят из одних и тех же элементов:

$$A = B \iff \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Если $A \neq B$, существует хотя бы один элемент, принадлежащий одному множеству и не принадлежащий другому.

Например, $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$, потому что $-1 \in \mathbb{Z}$, но $-1 \notin \mathbb{N}$.

Следствия равенства

1. Элементы множества **различны**: повторения не создают новых элементов.
2. **Порядок элементов несущественен**:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}.$$

Подмножества

Множество A называется **подмножеством** множества B, если каждый элемент A принадлежит B:

$$A \subseteq B \iff \forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется **истинным подмножеством** множества B:

$$A \subset B.$$

Каждое множество является подмножеством самого себя:

$$A \subseteq A,$$

но не является своим истинным подмножеством: $A \not\subset A$.

Свойства включения

- **Рефлексивность:** $A \subseteq A$.
- **Транзитивность:** если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
- **Антисимметричность:** если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.

Последнее свойство позволяет доказывать равенство множеств через взаимное включение.

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app