Дискретная логика

Краткое содержание

Дискретная математика изучает конечные и дискретные структуры, а математическая логика формализует рассуждения с помощью высказываний, логических операций и таблиц истинности.

Дискретная математика

Дискретность — свойство объекта, состоящего из отдельных частей. Компьютер является дискретным устройством: информация в нём представляется и обрабатывается отдельными , различимыми состояниями.

> ***Дискретная математика*** *— область математики, изучающая свойства структур конечного и дискретного характера.*

Она является фундаментом компьютерных наук, потому что компьютер работает не с непрерывными величинами, а с конечными наборами символов и состояний. Методы дискретной математики также применяются в моделировании и служат своеобразным **символьным метаязыком** для различных наук.

Основные разделы:

- **Математическая логика**
- **Теория множеств**
- **Комбинаторика**
- **Теория графов**
- **Теория автоматов**
- **Теория кодирования**
- **Теория алгоритмов**



Основы математической логики

> ***Математическая логика*** *— анализ рассуждений, при котором исследуется форма рассуждения, а не его содержание.*

В логике можно формализовать рассуждения независимо от предметной области. Важна не сама ситуация, а структура связи между утверждениями.

В основе любого рассуждения лежат **высказывания**.

> ***Высказывание*** *— повествовательное предложение, которое является либо истинным, либо ложным, но не тем и другим одновременно.*

Это соответствует **закону исключённого третьего**: для высказывания возможны только два значения — истина или ложь.

Примеры:

- «Сумма углов треугольника равна 180°» — истинное высказывание.
- «Волга впадает в Каспийское море» — истинное высказывание.
- «Сумма углов треугольника равна 90°» — ложное высказывание.

Высказывания обозначают заглавными буквами латинского алфавита: X, Y, Z.

Из простых высказываний с помощью логических операций строят **составные высказывания**. Истинность составного высказывания определяется истинностью его компонентов и способом их соединения.

Логические операции

Основные логические операции:

Операция	**Обозначение**	**Чтение**	**Когда истинна**
Отрицание	$\neg X$	не X	Когда X ложно
Конъюнкция	$X \wedge Y$	X и Y	Когда оба высказывания истинны
Дизъюнкция	$X \vee Y$	X или Y	Когда истинно хотя бы одно высказывание
Импликация	$X \to Y$	если X, то Y	Ложна только при $X = 1, Y = 0$
Эквиваленция	$X \leftrightarrow Y$	X тогда и только тогда, когда Y	Когда значения совпадают

Отрицание — унарная операция: она действует на один операнд. Остальные базовые операции — бинарные, то есть используют два операнда.

Таблицы истинности

Для сокращения записи истину обозначают цифрой **1**, а ложь — цифрой **0**. Это не числовые значения переменных, а условные обозначения логических состояний.

Для одной переменной существует 2 варианта, для двух — $2^2 = 4$, для трёх — $2^3 = 8$. Поэтому таблица истинности выражения с n переменными содержит 2^n строк.

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app

Для двух переменных:

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Особенность импликации: из ложного высказывания может следовать как ложное, так и истинное; единственный ложный случай — истинное основание и ложное следствие.

Дополнительные операции

В математической логике используются ещё три составные операции:

Операция	**Обозначение**	**Смысл**	**Истинна**
Штрих Шеффера	$X \mid Y$	отрицание конъюнкции: $\neg(X \wedge Y)$	Кроме случая $X = 1$, $Y = 1$
Стрелка Пирса	$X \downarrow Y$	отрицание дизъюнкции: $\neg(X \vee Y)$	Только при $X = 0$, $Y = 0$
Сумма по модулю 2	$X \oplus Y$	исключающая дизъюнкция	Когда значения различаются

Исключающая дизъюнкция отличается от обычного «или»: она истинна только тогда, когда истинно ровно одно из двух высказываний.

Например, утверждение «я буду есть курицу или рыбу» в смысле выбора одного блюда соответствует исключающей дизъюнкции: нельзя одновременно выбрать оба варианта.

Таким образом, рассматриваются **восемь логических операций**: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, штрих Шеффера, стрелка Пирса и сумма по модулю 2.

Приоритет операций

Если в составном высказывании используется несколько операций, их выполняют согласно приоритету. Скобки явно задают порядок действий.

Обычно порядок такой:

1. **Отрицание** $\neg$.
2. **Штрих Шеффера** и **стрелка Пирса**.

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app

3. **Конъюнкция** $\wedge$.
4. **Дизъюнкция** $\vee$ и **сумма по модулю** 2 $\oplus$.
5. **Импликация** $\to$.
6. **Эквиваленция** $\leftrightarrow$.

Операции одного приоритета выполняются слева направо, если скобки не задают другой порядок. Для штриха Шеффера и стрелки Пирса желательно всегда использовать скобки: между ними нет единого общепринятого порядка приоритета.

Штрих Шеффера и стрелка Пирса являются **универсальными операциями**: любое сложное логическое выражение можно преобразовать так, чтобы в нём использовалась только одна из этих операций.

Формализация рассуждений

Формализация переводит обычное языковое высказывание в логическую форму.

Пример:

> *Если я не возьму зонт, то промокну, а если я промокну, то мне будет холодно.*

Вводим простые высказывания:

- X — «я возьму зонт»;
- Y — «я промокну»;
- Z — «мне будет холодно».

Тогда исходное высказывание имеет вид:

$$(\neg X \to Y) \wedge (Y \to Z)$$

Упрощённый вариант:

$$\neg X \to Z$$

Эти выражения **неэквивалентны**. Первое утверждает две последовательные связи: отсутствие зонта ведёт к промоканию, а промокание — к холоду. Второе сразу связывает отсутствие зонта с холодом, пропуская промежуточное звено.

Проверка эквивалентности

1. Определить простые высказывания и обозначить их буквами.
2. Записать логическую формулу каждого составного высказывания.
3. Определить число переменных.
4. Построить таблицу истинности из 2^n строк.
5. Выполнить операции в порядке приоритета.
6. Сравнить итоговые столбцы.

Для первого выражения используются три переменные, поэтому таблица содержит $2^3 = 8$ строк. Для второго — две переменные, поэтому таблица содержит $2^2 = 4$ строки. Чтобы сравнение было корректным, второе выражение переносят в общую таблицу с теми же тремя переменными.

Комбинации значений удобно записывать в порядке двоичного счёта: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Если итоговые столбцы хотя бы в одной строке различаются, высказывания не являются эквивалентными.

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app