Декартовы отношения

Краткое содержание

Декартово произведение задаёт упорядоченные пары, а его подмножества служат бинарными отношениями, которые можно описывать пятью способами.

Декартово произведение

Определение

> ***Декартово произведение*** *множеств A и B — множество всех упорядоченных пар, у которых первый компонент принадлежит A, а второй — B.*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Порядок компонентов важен: (a, b) и (b, a) — разные упорядоченные пары. Поэтому декартово произведение **некоммутативно в общем случае**: обычно $A \times B \neq B \times A$.

При $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{0, 2, 5, 8\}$ в $A \times B$ входят пары с первым элементом из A и вторым из B, например $(a, 0)$. В $B \times A$ первый элемент выбирается из B, а второй — из A.

Частные случаи

- **Декартов квадрат:** $A^2 = A \times A$.
- **Декартова степень:**

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ раз}}.$$

Её элементы — упорядоченные n-ки элементов множества A.

Наиболее известный пример — $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: множество всех упорядоченных пар действительных чисел. Его геометрическая интерпретация — **декартова система координат**, то есть координатная плоскость. Название связано с Рене Декартом.

Мощность произведения

> ***Теорема.*** *Для конечных множеств мощность декартова произведения равна произведению мощностей множеств.*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Если $|A| = 3$ и $|B| = 4$, то

$$|A \times B| = 3 \cdot 4 = 12.$$

Произведение $B \times A$ также содержит 12 пар, хотя сами пары в общем случае отличаются от пар из $A \times B$.

> ***Следствие.*** *Мощность декартовой n-й степени равна n-й степени мощности множества.*

$$|A^n| = |A|^n.$$

Каждая координата упорядоченной n-ки выбирается независимо из A, поэтому число вариантов перемножается n раз.

Бинарное отношение

> ***Бинарное отношение*** *между элементами множеств A и B — любое подмножество их декартова произведения.*

$$R \subseteq A \times B.$$

Термины **бинарное отношение** и **соответствие** обозначают одну и ту же идею.

Если $R \subseteq A \times A$, говорят, что отношение R **определено на множестве** A; в этом случае R является подмножеством декартова квадрата A^2.

Элементы $a \in A$ и $b \in B$ связаны отношением R, если

$$(a, b) \in R.$$

Вместо этого часто пишут aRb. При такой записи a называют **прообразом** элемента b, а b — **образом** элемента a.

Для специальных отношений используются привычные символы. Например, отношение «меньше» задаётся так:

$$R_{<} = \{(x, y) \in X \times X \mid x < y\}.$$

Пара $(1, 2)$ принадлежит этому отношению, поскольку $1 < 2$, а $(1, 0)$ не принадлежит, поскольку $1 < 0$ — неверное утверждение.

Способы задания отношений

Бинарное отношение можно задавать несколькими способами.

Способ	Представление	Основное свойство
Перечисление пар	Все пары, входящие в R	Подходит для конечных небольших множеств
Характеристическое свойство	Правило принадлежности пары	Подходит и для бесконечных множеств
Матрица	Нули и единицы	Удобна для компьютерного моделирования
Ориентированный граф	Вершины и направленные рёбра	Наглядна при проверке свойств
Координатная плоскость	Пары как точки	Удобна для числовых отношений

1. Перечисление упорядоченных пар

Выписываются все пары, для которых отношение выполняется. Например, при $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{0, 2, 5, 8\}$:

$$R_1 = \{(a, 0), (a, 5), (b, 2), (b, 8), (c, 0), (c, 8)\},$$

$$R_2 = \{(a, 0), (b, 2), (c, 8)\}.$$

Оба отношения являются подмножествами $A \times B$. Метод неудобен для больших и бесконечных множеств.

2. Характеристическое свойство

Задаётся правило, определяющее, когда пара принадлежит отношению:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid P(x, y)\}.$$

Например, условие $b \mid a$ задаёт отношение делимости на множестве чисел. Такой способ позволяет описывать бесконечные отношения без перечисления всех пар.

3. Матрица отношения

Для конечных упорядоченных множеств $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ строится матрица размера $m \times n$:

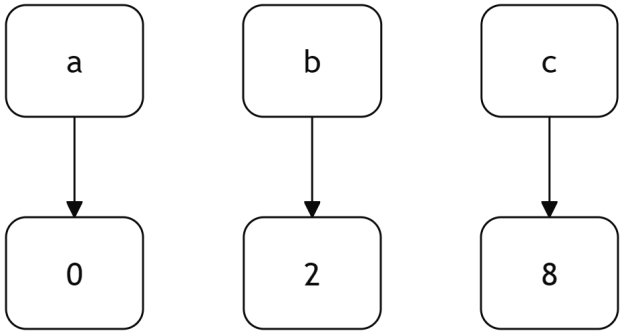
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Строки соответствуют элементам A, столбцы — элементам B. Для отношения R_1 при порядке столбцов $0, 2, 5, 8$:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ориентированный граф

Вершины — элементы множеств, а направленное ребро $a \to b$ проводится тогда и только тогда, когда $(a, b) \in R$. Для отношения R_2 граф имеет рёбра $a \to 0$, $b \to 2$, $c \to 8$.



Если отношение задано на одном множестве, используются только его элементы; могут появляться **петли**, например $b \to b$. Граф особенно удобен для визуальной проверки свойств отношений.

5. График на координатной плоскости

Пару (a, b) заменяют парой (x, y) и изображают как точку. Для числового отношения

$$y > x$$

на плоскости отмечается область над прямой $y = x$. Сама прямая не входит в отношение, поэтому её изображают пунктиром. Метод нагляден для числовых отношений, но редко применяется в строгой дискретной математике.

Пример: отношение кратности

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Отношение R задаётся условием: aRb, если a кратно b.

Эквивалентные записи условия:

$$aRb \iff b \mid a \iff a = bk \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}.$$

Перечисление пар

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5)\}.$$

Следовательно, $|R| = 10$.

Характеристическое свойство

$$R = \{(a, b) \in A^2 \mid b \mid a\}.$$

Матрица

При порядке строк и столбцов $1, 2, 3, 4, 5$:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ориентированный граф

Рёбра графа:

- $1 \to 1$;
- $2 \to 1$, $2 \to 2$;
- $3 \to 1$, $3 \to 3$;
- $4 \to 1$, $4 \to 2$, $4 \to 4$;
- $5 \to 1$, $5 \to 5$.

Координатная плоскость

На плоскости отмечаются те же 10 точек из $A \times A$. Например, $(4, 1)$ входит в отношение, потому что 4 кратно 1, а $(3, 2)$ не входит, поскольку 3 не делится на 2.