Матрицы и операции

Краткое содержание

Матрицы — прямоугольные таблицы чисел, над которыми определены сложение, умножение на число, матричное умножение, транспонирование и элементарные преобразования.

Базис пространства

> ***Базис*** *пространства* $\mathbb{R}^N$ *— линейно независимая система из* N *векторов, через которую линейно выражается любой вектор пространства.*

Основные свойства:

- векторы базиса **линейно независимы**;
- любой вектор из $\mathbb{R}^N$ выражается через векторы базиса;
- в $\mathbb{R}^N$ максимальная линейно независимая система содержит N векторов.

Любая линейно независимая система из N векторов в $\mathbb{R}^N$ является базисом.

Определение и элементы матрицы

Матрица — прямоугольная таблица чисел. Если в ней m строк и n столбцов, её размер обозначают $m \times n$:

$$A = (a_{ij})$$

где:

- a_{ij} — элемент матрицы;
- i — номер строки, $1 \le i \le m$;
- j — номер столбца, $1 \le j \le n$.

Например, a_{21} находится во второй строке и первом столбце. Матрица состоит из системы строк и системы столбцов; в зависимости от задачи рассматривают одну из них.

Специальные матрицы

Нулевая и квадратная матрицы

Нулевая матрица — матрица, все элементы которой равны нулю.

Квадратная матрица порядка n имеет n строк и n столбцов.

У квадратной матрицы элементы

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

образуют **главную диагональ**.

Диагональная и единичная матрицы

Диагональная матрица — квадратная матрица, у которой все внедиагональные элементы равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица является диагональной, поскольку её внедиагональные элементы равны нулю.

Единичная матрица I_n — диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Равенство и противоположная матрица

Две матрицы равны тогда и только тогда, когда:

1. они имеют одинаковый размер;
2. все их соответствующие элементы равны:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

для всех допустимых i и j.

Противоположная матрица $-A$ получается заменой каждого элемента на противоположный:

$$-A = (-a_{ij})$$

То есть если $A = (a_{ij})$, то элемент матрицы $-A$ в той же позиции равен $-a_{ij}$.

Сложение и умножение на число

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы **одинакового размера**. Если A и B имеют размер $m \times n$, то их сумма $C = A + B$ также имеет размер $m \times n$ и определяется поэлементно:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Складываются элементы, стоящие в одинаковых позициях.

Умножение на скаляр

Произведение матрицы A на число λ получается умножением каждого элемента на это число:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Например,

$$3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 24 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Для этих операций выполняются свойства линейного пространства:

- $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + 0 = A$;
- $A + (-A) = 0$;
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- $1A = A$.

Произведение матриц

Произведение AB существует, если **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй**.

Если

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times p},$$

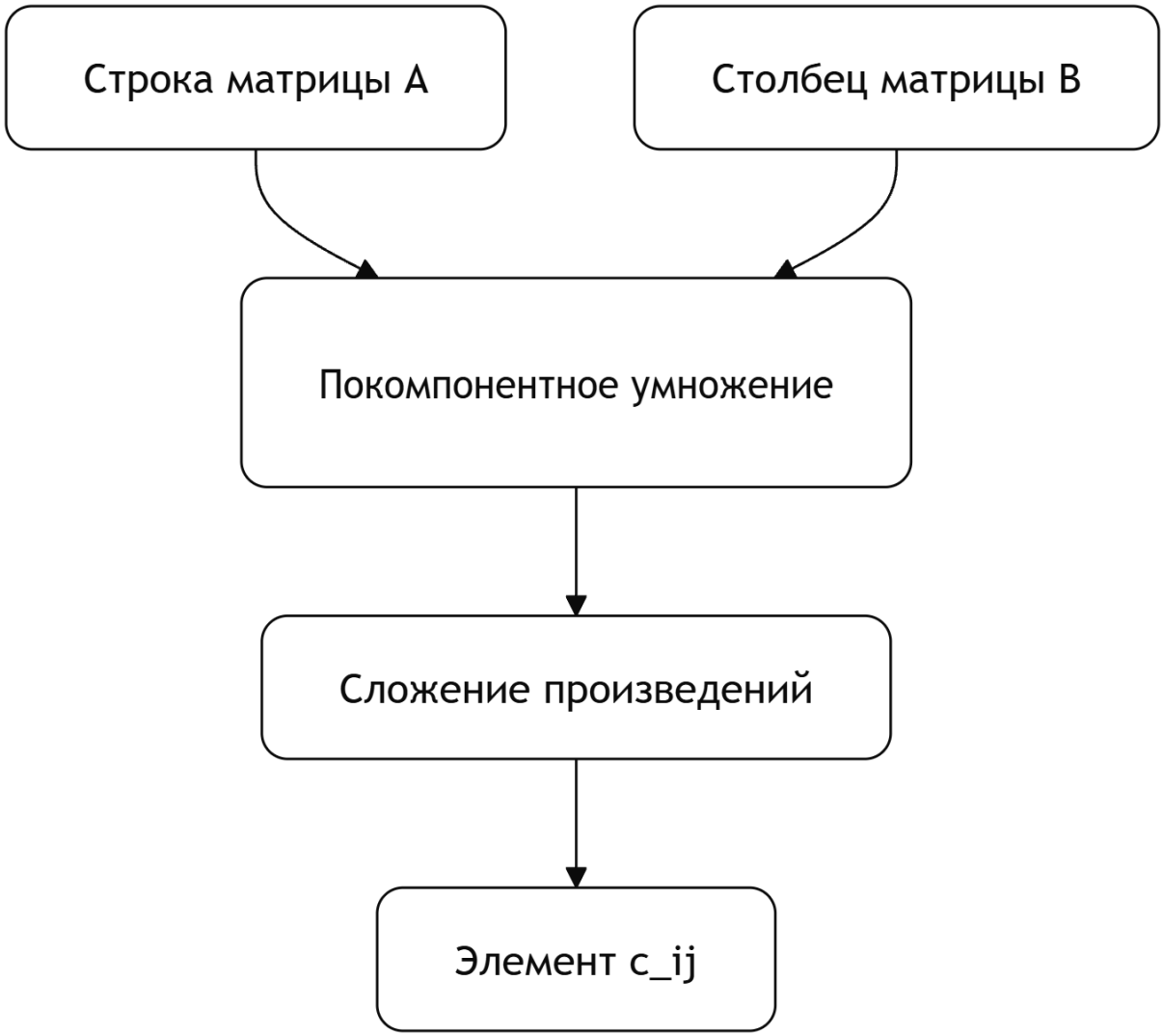
то

$$AB = C \in \mathbb{R}^{m \times p}.$$

Элемент c_{ij} равен скалярному произведению i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{\in} b_{nj}.$$

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app



Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет размер 2×3, а B — размер 3×3, поэтому произведение существует и имеет размер 2×3:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 3 & 1\cdot 5 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 1 + 5\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 5\cdot 3 & 0\cdot 5 + 3\cdot(-2) + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 3 & 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

В общем случае матричное умножение **не коммутативно**:

$$AB \neq BA.$$

Более того, одно из произведений может существовать, а другое — нет. Для произведения BA должны совпадать число столбцов B и число строк A.

Сохраняются свойства:

- ассоциативность: $(AB)C = A(BC)$;
- дистрибутивность: $A(B + C) = AB + AC$;

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app

- дистрибутивность: $(A+B)C = AC + BC$;
- вынесение скаляра: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Матричное умножение используется, например, при последовательной замене координат : несколько линейных преобразований можно объединить в одно, перемножив соответствующие матрицы.

Транспонирование

Транспонированная матрица A^{T} получается заменой строк столбцами:

$$(A^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ji}.$$

Если A имеет размер $m \times n$, то A^{T} имеет размер $n \times m$.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Основные свойства:

- $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$;
- $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$;
- $(\lambda A)^{\mathsf{T}} = \lambda A^{\mathsf{T}}$;
- порядок множителей при транспонировании произведения меняется:

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}.$$

Последнее правило связано с тем, что транспонирование меняет местами строки и столбцы, поэтому меняется и согласованность размеров.

Ступенчатая матрица

Ведущий, или **опорный**, элемент строки — её первый ненулевой элемент.

Матрица называется **ступенчатой**, если выполняются условия:

1. все нулевые строки расположены ниже ненулевых;
2. ведущий элемент каждой следующей ненулевой строки находится правее ведущего элемента предыдущей строки.

Пример ступенчатого вида:

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визуально ведущие элементы образуют **ступеньки**: слева и ниже каждого ведущего элемента находятся нули.

Ступенчатый вид получают с помощью **элементарных преобразований матрицы**. Такие преобразования меняют саму таблицу, но сохраняют важные свойства исходного объекта и позволяют привести матрицу к более простому, каноническому виду. Это особенно полезно при решении систем линейных уравнений.

Сделано на сайте Зачёт | zachet.app